Prodotto di una funzione di Sobolev con una funzione regolare

Proposizione 1. *Siano I un intervallo aperto in $\mathbb{R}$ e $p \in [1, +\infty]$.*
Sia $\eta : I \to \mathbb{R}$ una funzione tale che:

$$\eta \in C^1(I) \ , \qquad \eta \in L^\infty(I) \ , \qquad \eta' \in L^\infty(I).$$

Allora, per ogni $u \in W^{1,p}(I)$, abbiamo che

$$\eta\, u \in W^{1,p}(I) \qquad e \qquad (\eta u)' = \eta' u + u' \eta\,.$$

Inoltre,

$$\|\eta u\|_{L^p(I)} \leq \|\eta\|_{L^\infty(I)} \|u\|_{L^p(I)} \qquad e \qquad \|(\eta u)'\|_{L^p(I)} \leq \Big(\|\eta'\|_{L^\infty(I)} + \|\eta\|_{L^\infty(I)}\Big) \|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

Dimostrazione. Osserviamo che $\eta u \in L^p$ con

$$\|\eta u\|_{L^p(I)} \leq \|\eta\|_{L^\infty(I)} \|u\|_{L^p(I)},$$

e che $\eta' u + u' \eta \in L^p(I)$ con

$$\begin{aligned}
\|\eta' u + u' \eta\|_{L^p(I)} &\leq \|\eta' u\|_{L^p(I)} + \|u' \eta\|_{L^p(I)} \\
&\leq \|\eta'\|_{L^\infty(I)} \|u\|_{L^p(I)} + \|\eta\|_{L^\infty(I)} \|u'\|_{L^p(I)} \\
&\leq \Big(\|\eta'\|_{L^\infty(I)} + \|\eta\|_{L^\infty(I)}\Big) \|u\|_{W^{1,p}(I)}.
\end{aligned}$$

Quindi , basta dimostrare che $\eta' u + u' \eta$ sia la derivata debole di ηu.
Data una qualsiasi funzione $\varphi \in C^1_c(I)$, osserviamo che $\varphi \eta \in C^1_c(I)$ e calcoliamo

$$\begin{aligned}
\int_I \eta u \varphi' \, dx &= \int_I u \Big((\eta\varphi)' - \eta' \varphi\Big) \, dx \\
&= \int_I u \Big((\eta\varphi)' \, dx - \int_I \eta' \varphi \, dx \\
&= -\int_I u' \eta \varphi \, , dx - \eta' \varphi \, dx \\
&= -\int_I \varphi(x) \Big(u' \eta + \eta' \varphi\Big) \, dx,
\end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. □